



星期一, 19. 七月 2021

第 1 题. 设整数 $n \geq 100$. 伊凡把 $n, n+1, \dots, 2n$ 的每个数写在不同的卡片上. 然后他将这 $n+1$ 张卡片打乱顺序并分成两堆. 证明: 至少有一堆中包含两张卡片, 使得这两张卡片上的数之和是一个完全平方数.

第 2 题. 对任意实数 x_1, \dots, x_n , 证明下述不等式成立:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i + x_j|}.$$

第 3 题. 设 D 是锐角三角形 ABC ($AB > AC$) 内部一点, 使得 $\angle DAB = \angle CAD$. 线段 AC 上的点 E 满足 $\angle ADE = \angle BCD$, 线段 AB 上的点 F 满足 $\angle FDA = \angle DBC$, 且直线 AC 上的点 X 满足 $CX = BX$. 设 O_1 和 O_2 分别为三角形 ADC 和三角形 EXD 的外心. 证明: 直线 BC , EF 和 O_1O_2 共点.



星期二, 20. 七月 2021

第 4 题. 设圆 Γ 的圆心为 I . 凸四边形 $ABCD$ 满足: 线段 AB, BC, CD 和 DA 都与 Γ 相切. 设 Ω 是三角形 AIC 的外接圆. BA 往 A 方向的延长线交 Ω 于点 X , BC 往 C 方向的延长线交 Ω 于点 Z , AD 往 D 方向的延长线交 Ω 于点 Y , CD 往 D 方向的延长线交 Ω 于点 T . 证明:

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

第 5 题. 两只松鼠 B 和 J 为过冬收集了 2021 枚核桃. J 将核桃依次编号为 1 到 2021, 并在它们最喜欢的树周围挖了一圈共 2021 个小坑. 第二天早上, J 发现 B 已经在每个小坑里放入了一枚核桃, 但并未注意编号. 不开心的 J 决定用 2021 次操作来改变这些核桃的位置. 在第 k 次操作中, J 把与第 k 号核桃相邻的两枚核桃交换位置. 证明: 存在某个 k , 使得在第 k 次操作中, J 交换了两枚编号为 a 和 b 的核桃, 且 $a < k < b$.

第 6 题. 设整数 $m \geq 2$. 设集合 A 由有限个整数 (不一定为正) 构成, 且 $B_1, B_2, B_3, \dots, B_m$ 是 A 的子集. 假设对任意 $k = 1, 2, \dots, m$, B_k 中所有元素之和为 m^k . 证明: A 包含至少 $m/2$ 个元素.