2010年7月7日，星期三

1. 求所有的函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ，使得等式

$$f\left(\left[x\right]y\right)=f(x)\left[f(y)\right]$$

对所有 $x, y\in\mathbb{R}$成立.（这里，$\left[z\right]$表示不超过实数 z 的最大整数.）

2. 设三角形 ABC 的内心是 I，外接圆为Γ. 直线 AI 交圆Γ于另一点D. 设 E 是弧$\overset{\frown}{BDC}$上的一点, F 是边 BC 上的一点，使得

$$\angle BAF=\angle CAE<\frac{1}{2}\angle BAC.$$

设 G 是线段 IF 的中点. 证明：直线 DG 与 EI 的交点在圆Γ上.

3. 设$\mathbb{N}$是所有正整数构成的集合. 求所有的函数 $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，使得对所有 $m,n\in\mathbb{N}$，

$$\left(g(m)+n\right)\left(m+g(n)\right)$$

是一个完全平方数.

考试时间：4小时30分
每题7分

2010年7月8日，星期四

4. 设 P 是三角形 ABC 内部的一点，直线 AP，BP，CP 与三角形 ABC 的外接圆 Γ 的另一个交点分别为 K，L，M. 圆 Γ 在点 C 处的切线与直线 AB 相交于点 S. 假设 $SC=SP$，证明: $MK=ML$.

5. 有 6 个盒子 B_1,B_2,B_3,B_4,B_5,B_6，开始时每个盒子中都恰好有一枚硬币. 每次可以任意选择如下两种方式之一对它们进行操作:

方式 1: 选取一个至少有一枚硬币的盒子 $B_j(1\le j\le 5)$，从盒子 B_j 中取走一枚硬币，并在盒子 B_{j+1} 中加入 2 枚硬币.

方式 2: 选取一个至少有一枚硬币的盒子 $B_k(1\le k\le 4)$，从盒子 B_k 中取走一枚硬币，并且交换盒子 B_{k+1}(可能是空盒)与盒子 B_{k+2}(可能是空盒)中的所有硬币.

问: 是否可以进行若干次上述操作，使得盒子 B_1,B_2,B_3,B_4,B_5 中没有硬币，而盒子 B_6 中恰好有 $2010^{2010^{2010}}$ 枚硬币? （注: $a^{b^c}=a^{(b^c)}$.）

6. 设 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 是一个正实数数列. 假设存在某个固定的正整数 s，使得对所有的 $n>s$，有

$$a_n=\max\left\{a_k+a_{n-k}\,\middle|\,1\le k\le n-1\right\}.$$

证明: 存在正整数 l 和 N，$l\le s$，使得对所有的 $n\ge N$ 都有 $a_n=a_l+a_{n-l}$.

考试时间: 4 小时 30 分
每题 7 分