

2016年7月11日, 星期一

第1题. 已知三角形 BCF 中, 角 B 是直角. 在直线 CF 上取点 A , 使得 $FA = FB$, 且 F 在点 A 和 C 之间. 取点 D , 使得 $DA = DC$, 且 AC 是 $\angle DAB$ 的内角平分线. 取点 E , 使得 $EA = ED$, 且 AD 是 $\angle EAC$ 的内角平分线. 设 M 是线段 CF 的中点. 取点 X 使得 $AMXE$ 是一个平行四边形(这里 $AM \parallel EX, AE \parallel MX$).

证明: 直线 BD, FX 和 ME 三线共点.

第2题. 确定所有正整数 n , 使得可在一张 $n \times n$ 方格表的每一小方格中填入字母 I, M, O 之一, 满足下列条件:

- 在每一行及每一列中, 恰有三分之一的小方格填入字母 I , 三分之一的小方格填入字母 M , 三分之一的小方格填入字母 O ; 并且
- 在每条对角线上, 若该对角线上的小方格个数是三的倍数, 则恰有三分之一的小方格填入字母 I , 三分之一的小方格填入字母 M , 三分之一的小方格填入字母 O .

注: 一张 $n \times n$ 方格表的行与列按自然的顺序标记为1至 n . 由此每个小方格对应于一个正整数对 (i, j) , 其中 $1 \leq i, j \leq n$. 对 $n > 1$, 这张方格表有两类共计 $4n - 2$ 条对角线. 一条第一类对角线是由 $i + j$ 是某个常数的所有小方格 (i, j) 构成, 一条第二类对角线是由 $i - j$ 是某个常数的所有小方格 (i, j) 构成.

第3题. 设 $P = A_1A_2 \cdots A_k$ 是平面上的一个凸多边形. 顶点 A_1, A_2, \cdots, A_k 的纵横坐标均为整数, 且都在一个圆上. P 的面积记为 S . 设 n 是一个正奇数, 满足 P 的每条边长度的平方是被 n 整除的整数.

证明: $2S$ 是整数, 且被 n 整除.

2016年7月12日, 星期二

第4题. 一个由正整数构成的集合称为芳香集, 若它至少有两个元素, 且其中每个元素都与其它元素中的至少一个元素有公共的素因子. 设 $P(n) = n^2 + n + 1$. 试问: 正整数 b 最小为何值时能够存在一个非负整数 a , 使得集合

$$\{P(a+1), P(a+2), \dots, P(a+b)\}$$

是一个芳香集?

第5题. 在黑板上写有方程

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016),$$

其中等号两边各有2016个一次因式. 试问: 正整数 k 最小为何值时, 可以在等号两边擦去这4032个一次因式中的恰好 k 个, 使得等号每一边都至少留下一个一次因式, 且所得到的方程没有实数根?

第6题. 在平面上有 $n \geq 2$ 条线段, 其中任意两条线段都交叉, 且没有三条线段相交于同一点. 杰夫在每条线段上选取一个端点并放置一只青蛙在此端点上, 青蛙面向另一个端点. 接着杰夫会拍 $n-1$ 次手. 每当他拍一次手时, 每只青蛙都立即向前跳到它所在线段上的下一个交点. 每只青蛙自始至终不改变跳跃的方向. 杰夫的愿望是能够适当地放置青蛙, 使得在任何时刻不会有两只青蛙落在同一个交点上.

- (a) 证明: 若 n 是奇数, 则杰夫总能实现他的愿望.
- (b) 证明: 若 n 是偶数, 则杰夫总不能实现他的愿望.