2018年7月9日，星期一

第1题. 设Γ是锐角三角形ABC的外接圆. 点D和E分别在线段AB和AC上，满足$AD = AE$. 线段BD和CE的垂直平分线分别与Γ的劣弧$\widehat{AB}$和$\widehat{AC}$交于点F和G. 证明：直线DE与FG平行(或重合).

第2题. 求所有整数$n \geqslant 3$，使得存在实数$a_1, a_2, \cdots, a_{n+2}$，满足$a_{n+1} = a_1$，$a_{n+2} = a_2$，并且对$i = 1, 2, \cdots, n$，都有

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}.$$

第3题. 一个**反帕斯卡三角形**是由一些数排成的等边三角形数阵，其中每个不在最后一行的数都恰好等于排在它下面的两个数的差的绝对值. 例如，下面的数阵是一个反帕斯卡三角形，它共有四行，并且恰含有1至10中的每个整数.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

试问：是否存在一个共有2018行的反帕斯卡三角形，恰含有1至$1 + 2 + \cdots + 2018$中的每个整数?

2018年7月10日, 星期二

第4题. 我们所谓一个**位置**是指直角坐标平面上的一个点(x,y), 其中x,y都是不超过20的正整数.

最初时, 所有400个位置都是空的. 甲乙两人轮流摆放石子, 由甲先进行. 每次轮到甲时, 他在一个空的位置上摆上一个新的红色石子, 要求任意两个红色石子所在位置之间的距离都不等于$\sqrt{5}$. 每次轮到乙时, 他在任意一个空的位置上摆上一个新的蓝色石子. (蓝色石子所在位置与其它石子所在位置之间距离可以是任意值.) 如此这般进行下去直至某个人无法再摆放石子.

试确定最大的整数K, 使得无论乙如何摆放蓝色石子, 甲总能保证至少摆放K个红色石子.

第5题. 设$a_1, a_2, \cdots$是一个无限项正整数序列. 已知存在整数$N > 1$, 使得对每个整数$n \geqslant N$,

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

都是整数. 证明: 存在正整数M, 使得$a_m = a_{m+1}$对所有整数$m \geqslant M$都成立.

第6题. 在凸四边形$ABCD$中, $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. 点$X$在四边形$ABCD$内部, 且满足

$$\angle XAB = \angle XCD, \quad \angle XBC = \angle XDA.$$

证明: $\angle BXA + \angle DXC = 180°$.